Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Richiamo

Teorema (Cauchy)

Siano $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue su $[a,b]$ e derivabili su $]a,b[$

con $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Allora $\exists\, c \in]a,b[$ tale

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Teorema (De l'Hopital - 1°)

Siano $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

(1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$

(2) f, g derivabili su $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$

(3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o meno)

Allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ (che è $\frac{0}{0}$)

e vale $\boxed{\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$

Dim

caso $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$

Ossia

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in]a, a+\delta[\Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon$

ossia $\boxed{l - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \varepsilon}$ $(*)$

Considero f, g nell'intervallo $[y, t]$ dove

$a < y < t < a+\delta$

e uso il teorema di Cauchy:

$\exists c \in]y, t[$:

$$\frac{f(t) - f(y)}{g(t) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (**)$$

essendo $c \in]y, t[\subseteq]a, a+\delta[$ si ha (da (*))

da (**) $$l-\varepsilon < \frac{f(t)-f(y)}{g(t)-g(y)} < l+\varepsilon$$

ma prendo il $$\lim_{y \to a^+} \frac{f(t)-f(y)}{g(t)-g(y)} \overset{(1)}{=} \frac{f(t)-0}{g(t)-0} = \frac{f(t)}{g(t)}$$

Dalla permanenza del segno, otteniamo

$$l-\varepsilon < \frac{f(t)}{g(t)} < l+\varepsilon \quad \forall t \in]a, a+\delta[$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Esempio $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(\frac{\operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ f.i.} \right)$$

De l'Hopital $$= \lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Esempio $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{1-\cos 0}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \right)$

De l'Hopital $= \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{-(-\sin x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$= \frac{1}{2}$

Teorema (De l'Hopital - 2°)

Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ tali che

(1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$

(2) f, g derivabili in $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$

(3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$

e vale $\lim \frac{f(x)}{} = \lim \frac{f'(x)}{}$

e vale $$\boxed{\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Ricordo

f(x) derivabile in x_0 se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Natura dei punti di Non Derivabilità

Def (Punti angolosi)

Diremo che x_0 è un punto angoloso se

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1 \in \mathbb{R} \quad e$$

con $l_1 \neq l_2$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2 \in \mathbb{R}$$

Def (punto cuspidale)

Un punto x_0 si dice cuspidale per f(x) se

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1 \quad e \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$$

con $\boxed{l_1 \neq l_2}$ ma almeno uno dei due limiti $= \pm \infty$

<u>Def</u> (Punto a tangenza verticale)

Un punto x_0 si dice a <u>tangenza verticale</u> se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$$

Usando il teorema di De l'Hopital, per individuare la natura dei punti di non derivabilità è sufficiente usare il seguente

<u>Teorema</u>

Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile in $]a,b[\setminus \{x_0\}$

(1) Se x_0 è discontinuità di <u>1ª specie per $f'(x)$</u>

$\Rightarrow$ x_0 è punto <u>angoloso</u> per $f(x)$

ossia se $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

con $l_1 \neq l_2$ $\Rightarrow$ x_0 è angoloso

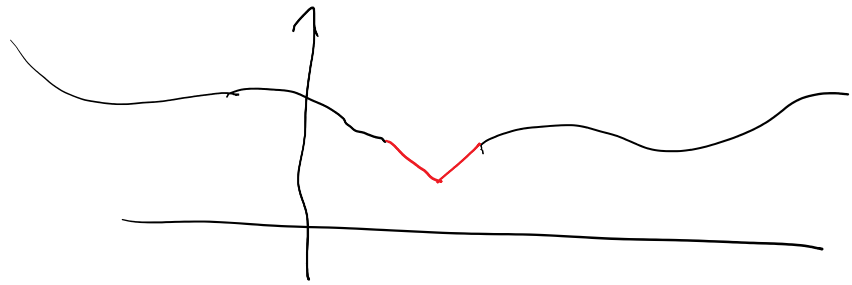
(2) se x_0 è discontinuità di 2ª specie per $f'(x)$

$\Rightarrow$ x_0 è cuspidale per $f(x)$

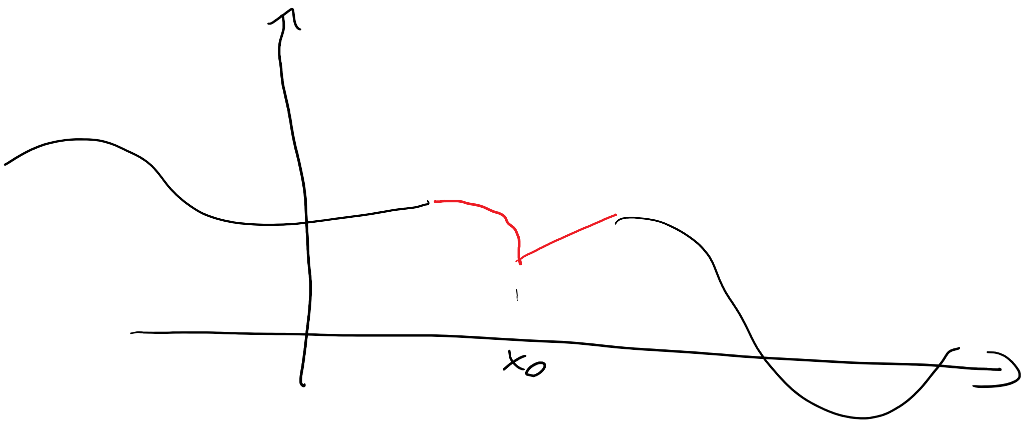
(3) se $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \infty \Rightarrow x_0$ è punto a tang. verticale per $f(x)$

Graficamente

Punto angoloso

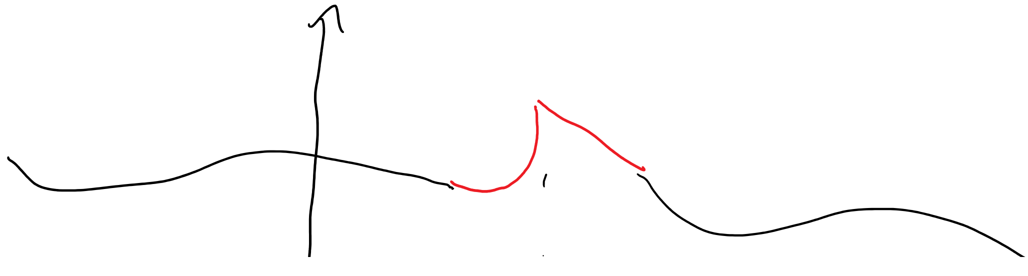


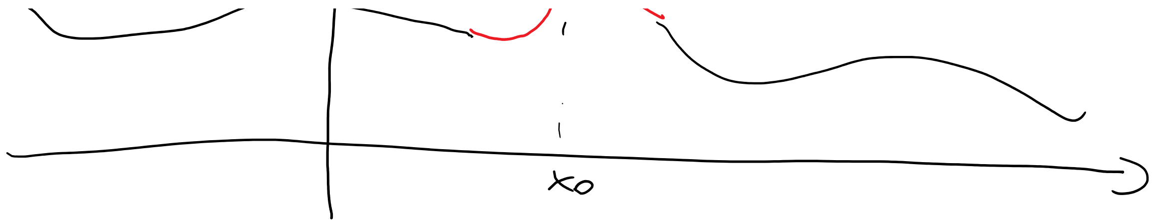
Punto cuspidale



in tal caso $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}$

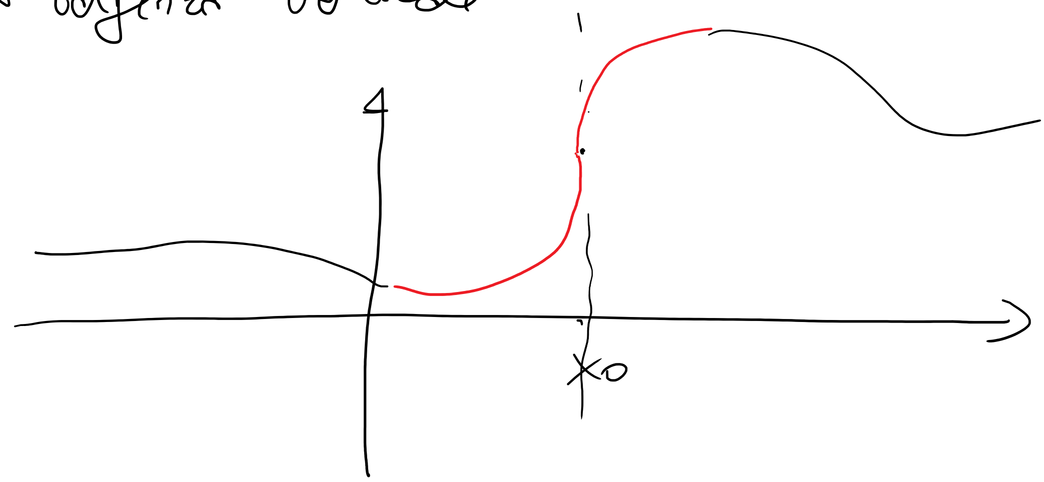
altro caso





In tal caso $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}$

Punto a tangenza verticale



In tal caso $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$

Derivate di ordine superiore

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto $f(x)$ derivabile su A

se $\forall x \in A$ la funzione $f'(x)$ è ulteriormente derivabile, definiamo

$$f''(x) = (f')'(x)$$

Esempio $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = (\cos x)' = -\sin x$$

Analogamente possiamo definire la derivata di ordine $n \in \mathbb{N}$, come

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$$

Funzioni Convesse

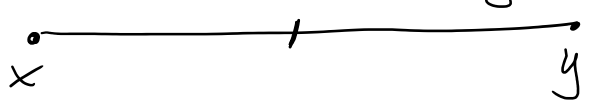
Def Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. $f(x)$ si dice convessa su (a,b) se vale, $\forall x, y \in (a,b)$

$$\boxed{f(tx + (1-t)y) \le t f(x) + (1-t) f(y) \quad \forall t \in [0,1]}$$

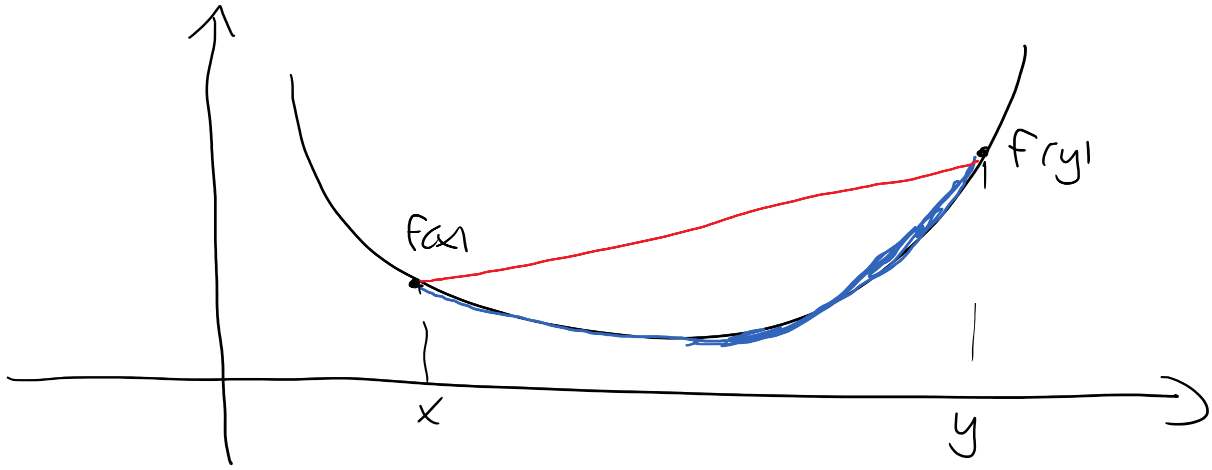
Intanto che significa $tx + (1-t)y \quad \forall t \in [0,1]$?

questi individuano tutti i punti del segmento di estremi x e y

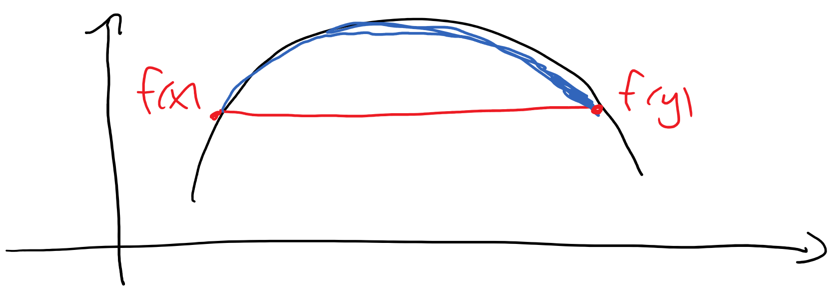
$tx + (1-t)y$ con $t \in [0,1]$



La definizione di funzione convessa ci dice che i punti del grafico della funzione su un intervallo $[x, y]$ sono al di sotto dei punti del segmento di estremi $f(x)$ e $f(y)$. Ossia



<u>Def</u> Una funzione $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ si dice <u>concava</u> su (a,b) se $-f(x)$ è convessa



<u>Teorema</u> (Convessità attraverso derivata prima)

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile su $]a,b[$. Allora

$\forall a \in]a,b[$

$f(x)$ convessa su (a,b) $\Longleftrightarrow$ $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$

$\forall x \in (a,b)$

eq.ne retta tangente al grafico di $f(x)$ in c

<u>Teorema</u> (Convessità attraverso derivata seconda)

Sia $f: (a.b) \to \mathbb{R}$ derivabile 2-volte. Allora

$f(x)$ convessa $\Longleftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$

<u>Def</u> (Punto di flesso)

Sia $f: (a.b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a.b)$ si dice punto di flesso se $\exists r>0$:

o

(1) $f(x)$ è convessa in $]x_0-r, x_0[$ e $f(x)$ concava in $]x_0, x_0+r[$

oppure

(2) $f(x)$ è concava in $]x_0-r, x_0[$ e $f(x)$ convessa in $]x_0, x_0+r[$

Infine enunciamo i seguenti teoremi:

<u>Teorema</u> (estremi attraverso derivate ordine superiore)

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n-volte, $x_0 \in]a,b[$

se $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

mentre $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

se n pari
- $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è min rel
- $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è max rel

se n dispari
- $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ in $]x_0 - r, x_0 + r[$ $f(x)$ è crescente
- $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ in $]x_0 - r, x_0 + r[$ $f(x)$ è decrescente

Teorema (Convessità attraverso derivate ordine superiore)

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n-volte, e sia $x_0 \in]a,b[$

se $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

se n pari
- $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ in $]x_0 - r, x_0 + r[$ $f(x)$ è convessa

$f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ in $]x_0 - r, x_0 + r[$ $f(x)$ è concava

se n dispari $\Rightarrow$ x_0 è punto di flesso

Esercizio

Determinare l'immagine della funzione

$$f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3$$

$CE = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

L'esercizio richiede $f(]-\infty, +\infty[) = ?$

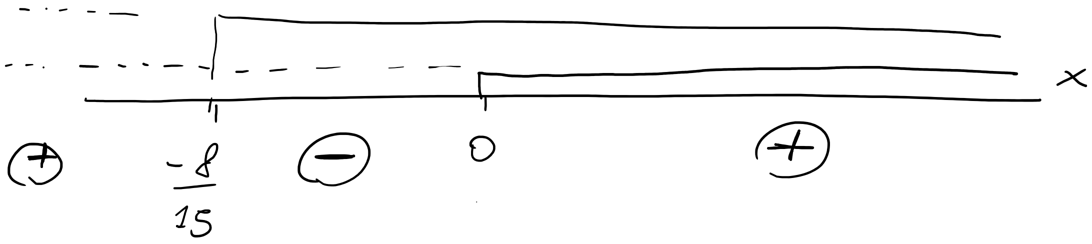
essendo $f(x)$ polinomio, quindi esso è continua su $\mathbb{R}$

Darboux $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} f = \left(\inf_{\mathbb{R}} f(x), \sup_{\mathbb{R}} f(x) \right)$

Determino $f'(x) = 5 \cdot 3 \cdot x^2 + 4 \cdot 2 \cdot x$

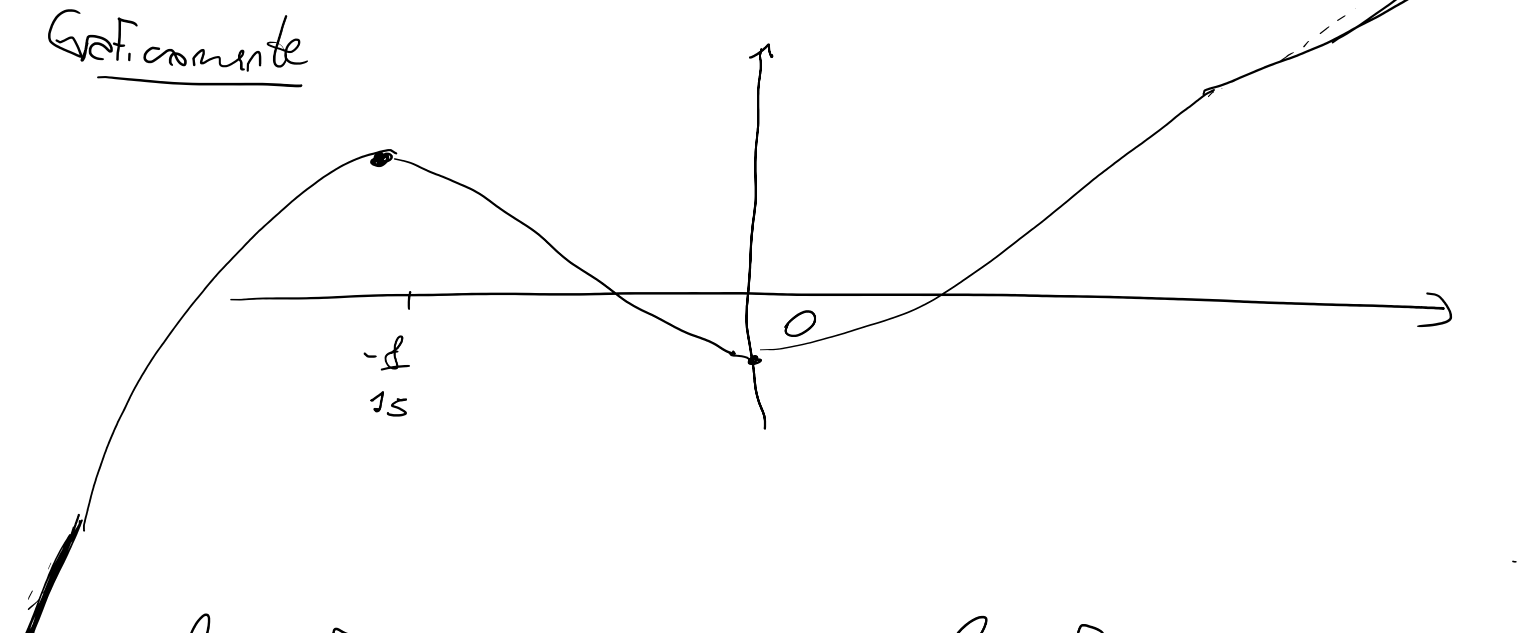
$$= 15x^2 + 8x \geq 0 \quad ?$$

$\iff x(15x+8) \geq 0$ (segni concordi)



f cresce | f decresce | f cresce

Graficamente



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

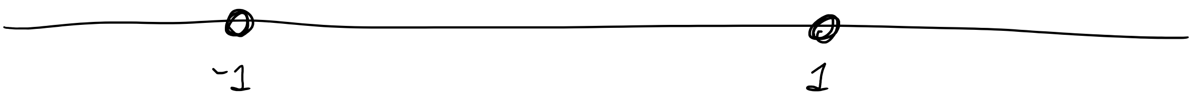
$\Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} f = -\infty$, $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$

Concludo $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

Esercizio Determinare l'immagine di

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$CE = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$$



$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} =$$

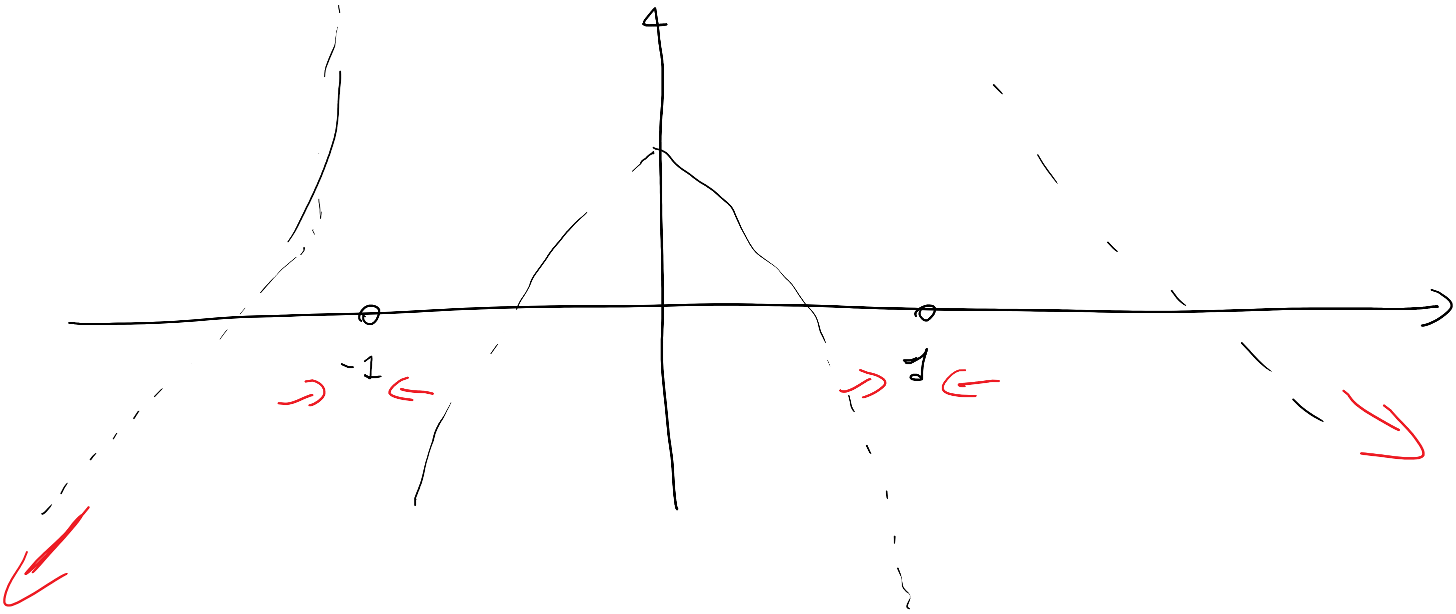
$$= \frac{2x\,[\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}]}{(x^2-1)^2} =$$

$$= -\frac{2x}{(x^2-1)^2} \geq 0 \quad (?)$$

$$\iff -2x \geq 0 \iff x \leq 0$$

Ossia in $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, 0\right[$ $f(x)$ cresce

In $\left]0, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ $f(x)$ decresce



Vediamo $\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = \left(\frac{1}{0} = \infty \right)$ segno?

Nota $x^2 > 0$ $\quad x^2-1>0 \iff x<-1 \cup x>1$

Siamo qui

$\Rightarrow \quad x \to -1^-$ num e denom sono entrambi positivi

$\Rightarrow \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = \left(\frac{1}{0} = \infty \right)$ ma $= -\infty$

Numeratore positivo

mentre denominatore negativo

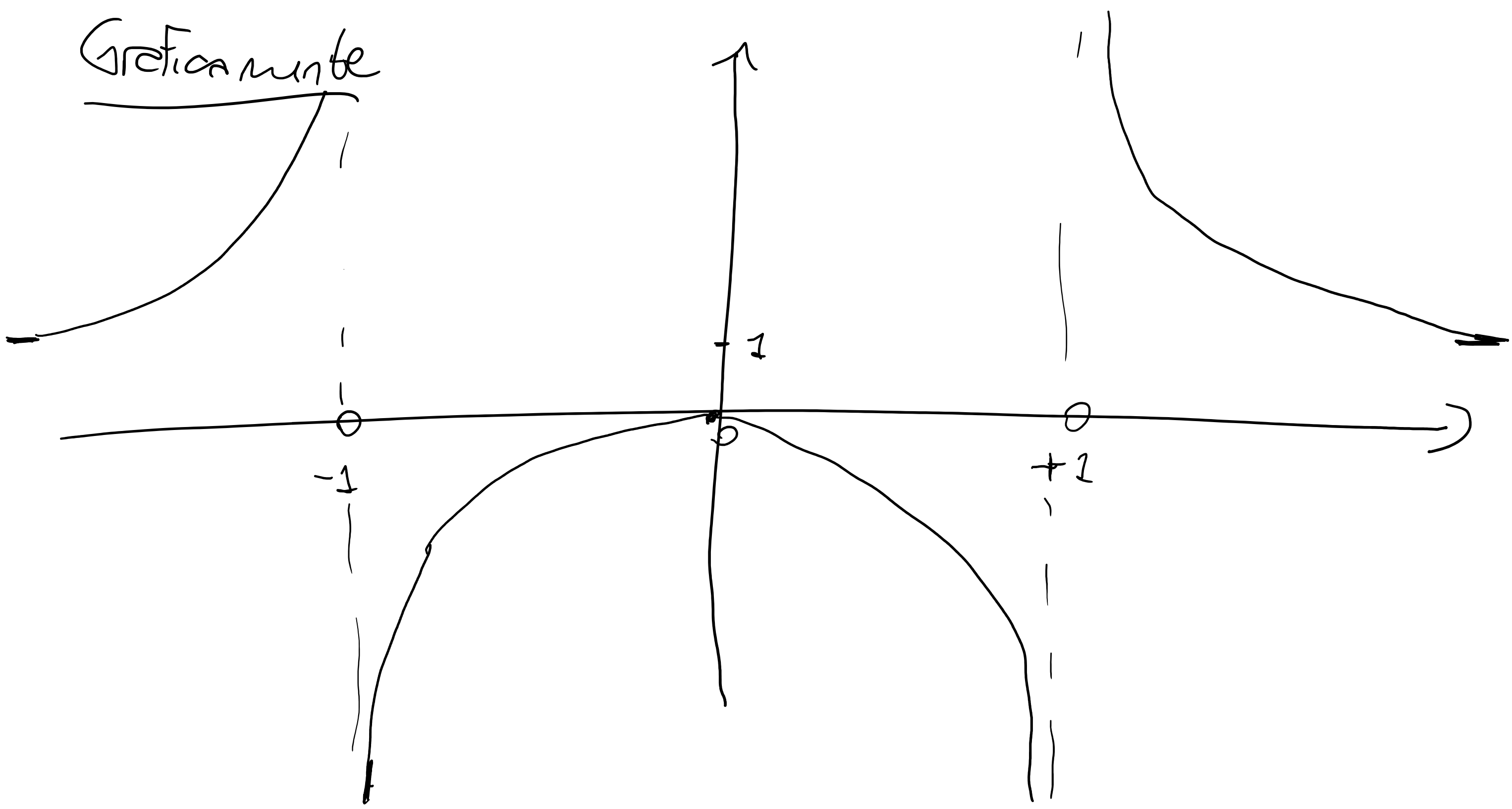
Analogamente

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

Graficamente



In $]-\infty, -1[\Rightarrow \text{Imf} = (\inf f \ , \ \sup f) =$

$$]-\infty,-1[\qquad]-\infty,-1[$$

$$=]1, +\infty[$$

In $]-1,1[\Rightarrow \operatorname{Im} f = \left(\inf_{]-1,1[} f , \sup_{]-1,1[} f \right) =$

$$=]-\infty, 0]$$

In $]1,+\infty[\Rightarrow \operatorname{Im} f = \left(\inf_{]1,+\infty[} f , \sup_{]1,+\infty} f \right) =$

$$=]1, +\infty[$$

Conclusione

$$\operatorname{Im}_{\mathbb{R}} f =]1,+\infty[\cup]-\infty, 0] \cup]1,+\infty[$$

$$=]1,+\infty[\cup]-\infty, 0] =$$

$$=]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$$

<u>Esercizio</u> Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (x^2 + 3x + 1)^2$$

$CE =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

No asintoti Orizz.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x^2+3x+1)^2}{x} = \pm\infty$$

$\Rightarrow$ No Asintoti Obliqui

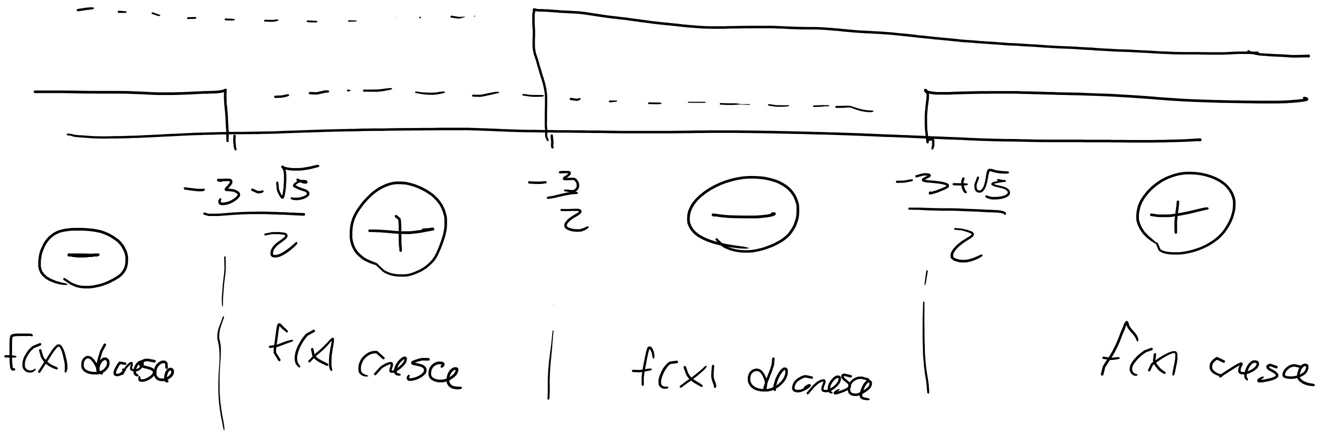
<u>Monotonia</u>: $f'(x) = 2(x^2+3x+1)(2x+3) \geq 0$?

$\Leftrightarrow \quad (x^2+3x+1) \cdot (2x+3) \geq 0$ (segni concordi)

(•) $x^2+3x+1 \geq 0 \qquad \Delta = 9 - 4 = 5 > 0$

$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \quad \cup \quad x \geq \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

(•) $2x+3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{3}{2}$



$$f''(x) = 2\left[(x^2+3x+1)'\cdot(2x+3) + (x^2+3x+1)\cdot(2x+3)'\right]$$

$$= 2\left[(2x+3)(2x+3) + (x^2+3x+1)\cdot 2\right]$$

$$= 2\left[(2x+3)^2 + (x^2+3x+1)\cdot 2\right]$$

$$= 2\left[4x^2+12x+9+2x^2+6x+2\right] =$$

$$= 2\left[6x^2+18x+11\right] \geq 0$$

$$\Delta = (3^2\cdot 2)^2 - 2^2\cdot 2\cdot 3\cdot 11 =$$

$$= 3^4\cdot 2^2 - 2^2\cdot 2\cdot 3\cdot 11 =$$

$$= 2^2\cdot 3\left[3^3 - 2\cdot 11\right] = 12\cdot[5]$$

$$F''(x) \geq 0 \iff$$

$$x \leq \frac{-18 - \sqrt{5 \cdot 12}}{12} \quad \cup \quad x \geq \frac{-18 + \sqrt{5 \cdot 12}}{12}$$

Grafico completo